

# Usrednjena vremensko-frekvencijska raspodjela energije za analizu signala u šumu

Irena Orović, *Member, IEEE*, Srdjan Stanković, *Senior Member, IEEE* i Viktor Sučić, *Member, IEEE*

**Sadržaj** —U radu je predložena vremensko-frekvencijska distribucija koja poboljšava preciznost procjene trenutne frekvencije za signale sa šumom. Ovaj pristup je zasnovan na kombinovanju i usrednjavanju vremensko-frekvencijskih distribucija dobijenih korišćenjem  $L$  forme spektrograma.  $L$  forma spektrograma sa malim vrijednostima parametra  $L$  može se okarakterisati velikim biasom i malom varijansom, dok veće vrijednosti parametra  $L$  uzrokuju smanjenje biasa i povećanje varijanse. U cilju procjene trenutne frekvencije sa malom srednjom kvadratnom greškom u prisustvu šuma, predložena je kombinovana distribucija zasnovana na spektrogramima sa različitim vrijednostima  $L$ . Predloženi pristup je testiran u eksperimentima sa različitim vrijednostima odnosa signal-šum.

**Ključne riječi** — vremensko-frekvencijska analiza signala,  $L$  forma spektrograma

## I. UVOD

Vremensko-frekvencijska analiza se danas primjenjuje u različitim aplikacijama koje podrazumijevaju prisustvo nestacionarnih signala, kao što su sistemi za obradu radarskih signala i sonara, komunikacioni sistemi, multimedijalni sistemi, analiza biomedicinskih signala, i slično [1]-[4]. Imajući u vidu da različite aplikacije podrazumijevaju ispunjavanje različitih zahtjeva, predložene su različite vremensko-frekvencijske distribucije. One se obično mogu klasifikovati na linearne, kvadratne i distribucije višeg reda [1],[5],[6]. Da bi omogućile tačnu estimaciju trenutne frekvencije, vremensko-frekvencijske distribucije treba da obezbijede dobru koncentraciju u vremensko-frekvencijskom domenu. Naime, vremensko-frekvencijske distribucije treba da što je moguće više redukuju faktor raspšenja koncentracije u vremensko-frekvencijskom domenu koji potiče od viših izvoda faze signala. Ovo naročito važi u slučaju signala sa brzo-promjenljivom trenutnom frekvencijom. Shodno tome, najčešće korišćene kvadratne distribucije, kao što su spektrogram i Wigner-ova distribucija, nisu pogodne za analizu i predstavljanje signala sa bržim varijacijama trenutne frekvencije, već se tada koriste distribucije višeg reda ili distribucije sa kompleksnim argumentom vremena

[7], [8]. Međutim, sa povećanjem reda distribucije, povećava se kompleksnost realizacije. Takođe, u realnim aplikacijama signali su obično zahvaćeni šumom, koji povećava varijansu estimatora trenutne frekvencije i može značajno da utiče na preciznost procjene trenutne frekvencije. Uticaj šuma je naročito izražen u slučajevima distribucija višeg reda, koje su znatno osjetljivije na šum u poređenju sa kvadratnim distribucijama.

Dakle, možemo zaključiti da efikasna vremensko-frekvencijska distribucija treba da obezbijedi dobar kompromis između biasa i varijanse, te zadržava jednostavnost realizacije. Stoga je u ovom radu predložena distribucija pogodna za analizu signala zahvaćenih Gausovim šumom koja kombinuje  $L$  forme spektrograma računane za različite vrijednosti parametra  $L$ .  $L$  forme vremensko-frekvencijskih distribucija su predložene u cilju poboljšanja koncentracije u vremensko-frekvencijskom domenu [9], [10]. Povećavajući vrijednost parametra  $L$ , povećava se koncentracija. Naime, za veće vrijednosti parametra  $L$  smanjuje se bias i povećava se preciznost procjene trenutne frekvencije. S druge strane, korišćenje većih vrijednosti parametra  $L$  u prisustvu šuma dovodi do povećanja varijanse, što rezultira velikom greškom procjene trenutne frekvencije. S aspekta minimizacije varijanse, poželjno je koristiti male vrijednosti parametra  $L$ . Stoga je osnovna ideja da se kombinuju spektrogrami sa različitim vrijednostima parametra  $L$ , odnosno da se obezbijedi bolji kompromis između varijanse i biasa usrednjavanjem vremenski-promjenljivih spektara dobijenih za različite vrijednosti parametra  $L$ .

Rad je strukturiran na sljedeći način.  $L$  forma spektrograma i kombinovana usrednjena distribucija definisane su u Sekciji II. Eksperimentalni rezultati dati su u sekciji III, gdje su testirane performanse predložene vremensko-frekvencijske distribucije za različite vrijednosti odnosa signala i šuma. Zaključak je dat u Sekciji IV.

## II. $L$ FORMA SPEKTROGRAMA I KOMBINOVANA USREDNJENA DISTRIBUCIJA

Vremensko-frekvencijsko predstavljanje koristi se za analizu vremenski-promjenljivih spektralnih osobina nestacionarnih signala. Najčešće korišćeni vremensko-frekvencijski pristupi zasnovani su na uvođenju vremenske zavisnosti u Fourier-ovu analizu korišćenjem funkcije

Ovaj rad je urađen u sklopu bilateralnog projekta finansiranog od strane Ministarstva nauke Crne Gore i Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske.

S. Stanković i I. Orović, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Univerzitet Crne Gore, 20000 Podgorica, Crna Gora. V. Sučić, Tehnički fakultet Rijeka, Vukovarska 58, HR-51000 Rijeka, Hrvatska.

Autor za kontakte: Irena Orovic, tel: +382 67 516 795, fax: +382 20 242 667, Email: irenao@ac.me

prozora u vremenskom domenu. Na taj je definisana na primjer kratkotrajna Fourier-ova transformacija u obliku:

$$STFT(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)w(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (1)$$

gdje je  $x(t)$  signal, dok je  $w(t)$  funkcija prozora. Energetska verzija kratkotrajne Fourier-ove transformacije je spektrogram:  $SPEC(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2$ . Osnovni nedostatak spektrograma je loša vremensko-frekvencijska rezolucija za signale sa vremenski promjenljivom trenutnom frekvencijom.

#### A. L forma Spektrograma

L forme vremensko-frekvencijskih distribucija uvedene su kao rješenje za poboljšanje koncentracije u vremensko-frekvencijskom domenu za signale sa nelinearnom trenutnom frekvencijom. L forme distribucija zasnovane su na konceptu frekvencijske linearizacije oko posmatranog vremenskog trenutka  $t$ .

L forma spektrograma je definisana kao kvadrat modula L-kratkotrajne Fourier-ove transformacije (L-STFT) [9]:

$$\begin{aligned} SpecL(t, \omega) &= |STFT_L(t, \omega)|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x^L\left(t + \frac{\tau}{L}\right)w(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

U nastavku su analizirana neka od bitnih svojstava L forme spektrograma.

#### Rezolucija L forme spektrograma:

Pretpostavimo da je signal  $x(t)$  kratkotrajan i da je u trenutku  $t=0$  koncentrisan u intervalu  $\Delta t \rightarrow 0$ . Ukoliko je prozor  $w(t)$  vremenski ograničen na interval  $|t| < T/2$ , tada je  $STFT_L$  vremenski ograničena na  $|t| < T/2L$ . To znači da je njeno trajanje jednako  $d=T/L$ . Dalje, ukoliko posmatramo signal u obliku:

$$x(t) = e^{-j\omega_x t} \quad (3)$$

tada je:

$$STFT_L(t, \omega) = W(\omega - \omega_x) e^{jL\omega_x t} \quad (4)$$

gdje je  $W(\omega)$  Fourier-ova transformacija funkcije prozora  $w(t)$ . Na primjer, širina Fourier-ove transformacije pravougaonog prozora je  $D=4\pi/T$ . Stoga je proizvod trajanja  $d$  i  $D$  jednak  $dD=4\pi/L$ . Povećavajući vrijednost parametra  $L$  u okviru L-STFT, proizvod trajanja  $d$  i  $D$  (koji figurišu u okviru principa neodređenosti) može postati proizvoljno mali, što znači da se može postići proizvoljno velika rezolucija u oba pravca istovremeno [9].

#### Faktor raspršenja koncentracije:

Za signal u obliku  $x(t) = Ae^{j\phi(t)}$ , vremensko-frekvencijska distribucija predstavljanje obezbjeđuje energetska koncentraciju duž trenutne frekvencije, što se može zapisati u sljedećem obliku:

$$TFR(t, \omega) = 2\pi A^2 \delta(\omega - \phi'(t)) *_{\omega} FT \left\{ e^{jQ(t, \tau)} \right\} *_{\omega} W(\omega), \quad (5)$$

gdje je Fourier-ova transformacija označena sa FT, dok funkcija  $Q(t, \tau)$  naziva faktor raspršenja koncentracije oko trenutne frekvencije. Ovaj faktor sadrži različite izvode višeg reda faze  $\phi(t)$  i zavisi od vremensko-frekvencijske distribucije. Optimalna distribucija za određeni signal treba da bude skoncentrisana oko trenutne frekvencije sa najmanjim mogućim raspršenjem. Faktor raspršenja koncentracije za L formu spektrograma može se definisati kao:

$$\Delta\phi = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{\phi^{(s)}(t)\tau^s}{s!L^{s-1}} \quad (6)$$

Dakle, možemo zaključiti da za velike vrijednosti parametra  $L$  uticaj viših izvoda faze značajno opada.

#### B. Kombinovana usrednjena distribucija

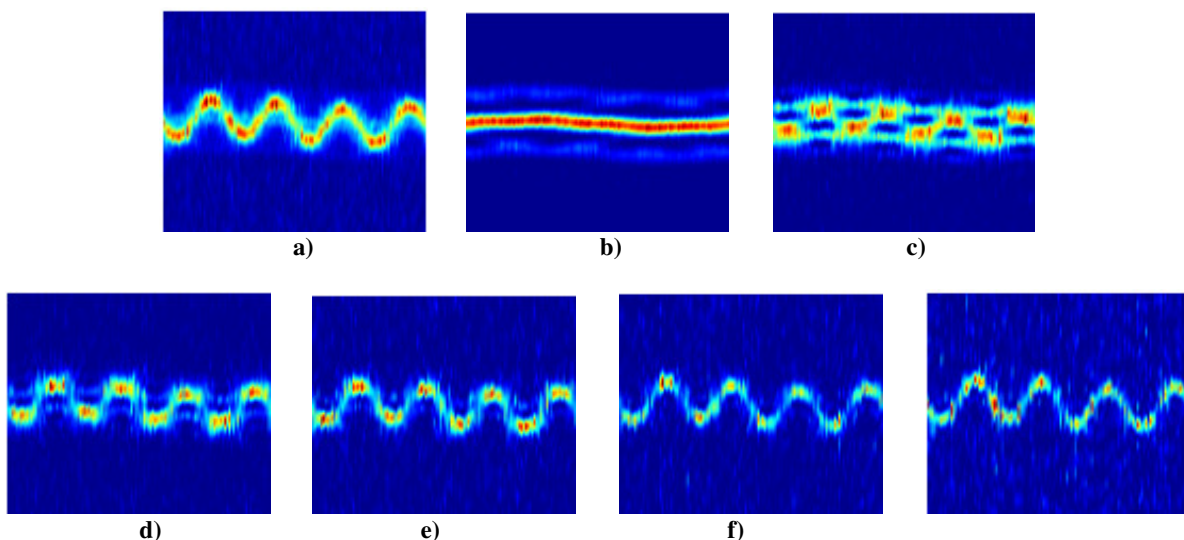
Kako bi obezbijedili kompromis između oprečnih zahtjeva za malim biasom i istovremeno za malom varijansom, u slučajevima signala zahvaćenih šumom, može se definisati distribucija koja predstavlja usrednjenju kombinaciju više spektrograma računatih sa različitim vrijednostima parametra  $L$ :

$$MSpecL(t, \omega) = \frac{1}{K} \sum_{L_k=1}^K SpecL_k(t, \omega) \quad (7)$$

gdje je  $SpecL_k = SpecL$  za  $L=L_k$ . Eksperimentalno se pokazuje da  $K < 6$  obezbjeđuje zadovoljavajuće rezultate za procjenu trenutne frekvencije signala sa brzo-promjenljivom faznom funkcijom, a što se vidi i u primjeru u Sekciji III.

Trenutna frekvencija se može estimirati na osnovu relacije:

$$\bar{\omega}(t) = \arg \left[ \max_{\omega \in Q} (MSpecL(t, \omega)) \right], \quad (8)$$



Sl. 1: a) *MSpecL*, b) *SpecL*,  $L=1$ , c) *SpecL*,  $L=2$ , d) *SpecL*,  $L=3$ , e) *SpecL*,  $L=4$ , f) *SpecL*,  $L=5$ , g) *SpecL*,  $L=6$  (SNR=15dB)

gdje  $Q=\{\omega: 0\leq|\omega|<\pi/(2T)\}$  predstavlja osnovni interval duž frekvencijske ose.

U cilju ilustracije predloženog pristupa, jedan primjer je prikazan u okviru Sl. 1. Spektrogrami su računati za  $L_k=1,2,\dots,6$ , tj. za  $K=6$ . Posmatrani signal je dat u obliku:

$$x(t)=Ae^{j(3/4\cos(4\pi t)+2/3\cos(\pi t))}+\varepsilon(t), \quad (9)$$

gdje je  $\varepsilon(t)$  kompleksni bijeli Gauss-ov šum.

Rezultujuća usrednjena distribucija prikazana je na slici 1.a. Individualni spektrogrami, računati za vrijednosti  $L_k=1,\dots,6$ , prikazani su redom na Sl. 1.b-g.

Primijetimo da je za slučajeve  $L_k=1$  i  $L_k=2$  karakterističan velik bias, dok je u slučajevima  $L_k=4$  i  $L_k=5$ , bias mali ali je varijansa značajno veća. Srednje kvadratne greške estimacije trenutne frekvencije za individualne spektrogram i predloženu usrednjenu distribuciju date su u Tabeli 1. Primijetimo da predložena distribucija obezbeđuje značajno manje greške procjene trenutne frekvencije u odnosu na sve zasebne  $L$  forme spektrograma.

### III. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

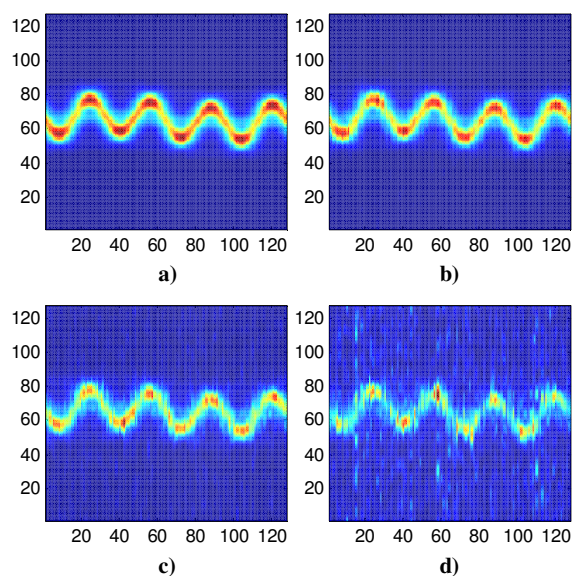
U primjeru je testirana efikasnost procjene trenutne frekvencije za različite vrijednosti odnosa signala i šuma. Signal je dat u obliku:

$$x(t)=Ae^{j(3/4\cos(4\pi t)+2/3\cos(\pi t))}+\varepsilon(t) \quad (10)$$

dok su razmatrane distribucije za slučaj posmatranog signala prikazane na Sl. 1, za odnos signala i šuma SNR=18dB.

Na Sl. 2 prikazan je izgled predložene vremensko-frekvencijske distribucije za signal bez šuma (Sl. 2a) i za signal u šumu, za različite vrijednostima odnosa signala i šuma (SNR). Primijetimo da varijansa raste sa povećanjem vrijednosti SNR, te dovodi do povećanja greške prilikom procjene trenutne frekvencije signala.

Za svaki od spektrograma *SpecL* (sa različitim vrijednostima parametra  $L$ ) koji učestvuju u formiranju usrednjelog spektrograma *MSpecL* računata je srednja kvadratna greška procjene trenutne frekvencije (Tabela 1). Srednje kvadratne greške za *MSpecL* date su u posljednjem redu tabele.



Sl. 2. a) *MSpecL* bez šuma, b) *MSpecL* za SNR=24 dB, c) *MSpecL* za SNR=18 dB, d) *MSpecL* za SNR=12 dB

TABELA 1: SREDNJE KVADRATNE GREŠKE (MSE) PROCJENE  
TRENUTNE FREKVENCIE

SNR	24dB	18dB	12dB
SPECL, L=1	46	47.6	48
SPECL, L=2	18.7	30	34.6
SPECL, L=3	8.1	12.2	14.8
SPECL, L=4	3.4	5.5	20
SPECL, L=5	1.4	5.3	54
SPECL, L=6	2	4.1	193
MSPECL	0.6	0.8	1.6

Iz Tabele 1 možemo primijetiti da za sve vrijednosti SNR, MSPECL obezbjeđuje malu grešku, uvijek znatno manju od grešaka za pojedinačne spektrograme.

#### IV. ZAKLJUČAK

U radu je predložena forma distribucije bazirana na L-spektrogramima koja omogućava poboljšanje tačnosti estimacije trenutne frekvencije za nestacionarne signale sa vremenski-promjenljivom funkcijom faze. Usrednjavanjem određenog broja L-spektrograma za različite vrijednosti parametra  $L$ , predložena distribucija obezbjeđuje dobar kompromis između biasa i varianse estimatora u prisustvu Gauss-ovog šuma. Ona obezbjeđuje i male srednje kvadratne greške estimacije trenutne frekvencije signala sa šumom čak i u slučaju brzih varijacija trenutne frekvencije.

#### LITERATURA

- [1] Proceedings of the IEEE, Special issue on Time-Frequency Analysis, vol. 84, no. 9, Sept. 1996.
- [2] B. Boashash, Ed., Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference. Amsterdam: Elsevier, 2003.
- [3] I. Shafi, J. Ahmad, S. I. Shah, and F. M. Kashif, "Techniques to obtain good resolution and concentrated time-frequency distributions: a review," EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, vol. 2009, Article ID 673539, 43 pages, 2009.

- [4] E. Sejdić, I. Djurović, J. Jiang, "Time-frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances," Digital Signal Processing, vol. 19, no. 1, pp. 153-183, Jan. 2009.
- [5] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis: Theory and Applications*, Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall PTR, 1995.
- [6] F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels: "Linear and quadratic time-frequency signal representation," IEEE Signal Proc. Magazine, April 1992, pp.21-67.
- [7] C. Cornu, S. Stanković, C. Ioana, A. Quinquis, and LJ. Stanković, "Generalized representation derivatives for regular signals," IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 55, no. 10, pp. 4831-4838, Oct. 2007.
- [8] S. Stanković, N. Žarić, I. Orović, C. Ioana, "General form of time-frequency distribution with complex-lag argument," Electronics Letters, vol. 44, no. 11, pp. 699-701, May 2008.
- [9] LJ. Stanković, „L-Class of time-frequency distributions," IEEE Signal Processing Letters, vol. 3, No. 1, pp. 22-25, Jan 1996
- [10] LJ. Stanković, "A method for improved distribution concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution," IEEE Transaction on Signal Processing, vol. 43, No. 5, pp. 1262-1268, May 1995.

#### ABSTRACT

*Abstract* —A time-frequency approach for improved instantaneous frequency estimation of a noisy signal has been proposed. This approach is based on a time-frequency distribution obtained by averaging the L-spektrograma. The spectrogram with lower values of parameter  $L$  produces large bias and low variance, while higher  $L$  decreases bias and increases the variance of instantaneous frequency estimation. In order to provide low mean square error of the instantaneous frequency estimation, the averaged L-spektrogram based distribution is proposed leading to the better bias-variance compromise. The proposed approach has been tested on a noisy synthetic signal for with different values of signal to noise ratio.

#### An Averaged Time-Frequency Distribution for Noisy Signals Analysis

Srdan Stanković, Irena Orović, and Viktor Sučić