REKURZIVNI METOD ZA RAČUNANJE KRATKOTRAJNE FURIJEOVE TRANSFORMACIJE

A RECURSIVE METHOD FOR SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM CALCULATION

Miloš Daković, Miloš Brajović, Ljubiša Stanković
Elektrotehnički fakultet Podgorica

Sadržaj: *U radu je predstavljen metod za rekurzivno računanje diskretne Short Time Fourier-ove transformacije. Izvršena je analiza numeričke složenosti klasičnog postupka za proračun ove transformacije primjenom brzih algoritama za računanje Diskretne Fourier-ove transformacije, kao i analiza numeričke složenosti predloženog rekurzivnog postupka. Sprovedena je analiza vrijednosti koraka pomjeranja prozora za koje postoji ušteda u broju operacija pri korišćenju predloženog metoda, i ilustrativno predstavljena procentualna ušteda u broju operacija za slučaj prozora širine 1024 odbirka. Takođe, u radu su prikazani numerički rezultati analize greške koja nastaje zbog rekurzivne prirode uvedenog postupka.*

Abstract: *A method for recursive calculation of discrete Short Time Fourier is presented. Numerical complexity analysis of classic Short Time Fourier transform calculation via fast Fourier Transform algorithms is performed along with numerical complexity analysis of proposed method. Analysis of the computational savings versus time-shift of the analysis window is performed, and percentage savings for window width of 1024 samples is presented. Numerical results for numerical error caused by proposed recursive method are also presented.*

1. UVOD

Fourier-ova transformacija (FT) [3-6] je pogodna za analizu signala čiji se spektralni sadržaj ne mijenja tokom vremena (stacionarni signali), ali ona ne daje nikakvu informaciju o trenucima pojavljivanja i trajanju komponenti u slučaju signala čiji je spektralni sadržaj vremenski promjenljiv (nestacionarni signali). Takođe, u slučaju multikomponentnih signala [1,2,8] FT ne može dati informaciju o širini spektra njihovih pojedinih komponenti. Ova ograničenja dovela su do razvoja vremensko-frekvencijske (TF) analize signala. Ona obezbjeđuje brojne tehnike i alate za analizu i obradu signala u vremenskom i u frekvencijskom domenu istovremeno.

Jedna od najčešće korišćenih TF reprezentacija signala je tzv. Short Time Fourier-ova transformacija (STFT) koja spada u klasu linearnih transformacija [1,2,7,8]. Definisana je sljedećim izrazom:

$$STFT(t,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)w^*(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (1)$$

Funkcija $w(\tau)$ predstavlja funkciju prozora. Razlikujemo različite vrste funkcija prozora: pravougaoni, Hanning-ov, Hamming-ov, Gausov, Balckman-ov itd. Funkcija prozora omogućava odsijecanje signala oko datog trenutka t, odnosno njegovu lokalizaciju u vremenskom domenu, nakon čega se nalazi FT odsječenog signala. Zatim se prozor pomjera na naredni trenutak i navedeni postupak se ponavlja. Time se za svaki trenutak vremena dobija spektralni sadržaj signala, čime se dobija vremensko-frekvencijska reprezentacija signala. Kvadratni moduo STFT naziva se spektrogram i on spada u klasu često upotrebljavanih kvadratnih TF reprezentacija (distribucija).

Za numeričke proračune neophodna je diskretizacija izraza (1). Diskretna forma STFT data je sa:

$$STFT(n,k)=\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} x(n+m)w(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \qquad (2)$$

gdje N predstavlja dužinu funkcije prozora u diskretnom vremenskom domenu.

Izraz (2) može se računati korišćenjem algoritama za brzo računanje Diskretne Fourier-ove transformacije (DFT) poznatih kao FFT (Fast Fourier Transform) [3-6], imajući u vidu da se može predstaviti na sljedeći način [1,7]:

$$STFT(n,k)=DFT\left\{x(n+m)w(m)\right\} \qquad (3)$$

Diskretna Fourier-ova transformacija definiše se na sljedeći način:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=DFT_N\{x(n)\} \qquad (4)$$

gdje N predstavlja broj tačaka u kojima se računa DFT. Ilustrativan primjer algoritma za brzo računanje DFT je i „Decimation in frequency“. Ako se FFT računa u $N=2^m$ tačaka, tada se po ovom algoritmu ovaj DFT razbija na dva od $N/2$ članova, jedan za parne indekse frekvencije, $k = 2r$ i drugi za neparne, $k = 2r+1$, odnosno:

$$\begin{aligned} X(2r) &= DFT_{N/2}\{x(n) + x(n+N/2)\} \\ X(2r+1) &= DFT_{N/2}\{x(n) - x(n+N/2)\} \cdot e^{-j2\pi n/N} \end{aligned} \tag{5}$$

a zatim se ove razbijaju na DFT od $N/4$ članova itd. Tako se početna DFT od N članova dijeljenjem na pola u m koraka razbija u potpunosti do elementarnog množenja i sabiranja.

STFT se može računati za svaki diskretni trenutak vremena n u slučaju signala velike nestacionarnosti, dok se kod relativno stacionarnih signala, odnosno signala kod kojih su varijacije frekvencije u vremenu dosta male unutar koriščenog prozora, STFT može računati nakon svakih l odbiraka, gdje je l pozitivan cio broj. Ako se STFT računa u trenutku n, tada je sljedeći trenutak u kojem se ona računa $n+l$. Ovakav pristup se često primjenjuje u praksi.

Iako izraz (3) omogućava računanje STFT primjenom brzih algoritama za DFT, u slučaju tzv. *real-time* aplikacija, gdje je neophodno da se rezultati proračuna dobijaju na najbrži mogući način, postoji motivacija za uvođenje metoda za ubrzavanje računanja STFT. Jedan pristup ovoj problematici je rekurzivni metod [2,4]. Rekurzivno računanje STFT bitno je sa stanovišta hardverske implementacije ove, i nekih drugih vremensko-frekvencijskih reprezentacija. Cilj je smanjiti numeričku kompleksnost izraza (3), to jest ukupnog broja operacija potrebnih za njegovo računanje.

2. REKURZIVNI METOD ZA RAČUNANJE STFT

U literaturi je poznato [2,4,9,10] da je izraz (2) u slučaju jediničnog pravougaonog prozora $w(m)$ dužine N odbiraka ekvivalentan sljedećem izrazu:

$$\begin{aligned} STFT_R(n,k) = &\left[x(n+\frac{N}{2}-1) - x(n-\frac{N}{2}-1) \right](-1)^k e^{j2\pi k/N} + \\ &+ STFT(n-1,k)e^{j2\pi k/N} \end{aligned} \tag{6}$$

Za računanje STFT u trenutku n koristi se STFT izračunata u trenutku $n-1$, kao i dva odbirka signala u trenucima $n+N/2-1$ i $n-N/2-1$.

U slučaju da funkcija prozora $w(m)$ predstavlja Hanning-ov, Hamming-ov ili Blackman-ov prozor, STFT se može izračunati pomoću STFT dobijene za pravougaoni prozor na sljedeći način:

$$\begin{aligned} STFT(n,k) = &\, a_{-1}STFT_R(n,k) + \\ &+ a_0 STFT_R(n,k-1) + \\ &+ a_1 STFT_R(n,k+1) \end{aligned}$$

gdje su koeficijenti:

$$(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.25,\ 0.5,\ 0.25)$$
$$(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.23,\ 0.27,\ 0.23)$$
$$(a_{-1}, a_0, a_1) = (0.04,\ 0.25,\ 0.42,\ 0.25,\ 0.04)$$

dati za Hanning-ov, Hamming-ov i Blackman-ov prozor respektivno.

Spomenuta analiza odnosi se na rekurzivno računanje STFT za svaki uzastopni trenutak n, gdje je naredni trenutak dat sa $n+l$, gdje je $l=1$.

Neka je sada l pozitivan cio broj koji predstavlja korak po vremenskom indeksu n. STFT treba računati u trenucima $n+l$. Cilj je doći do relacije ekvivalentne relaciji (6) koja će omogućiti rekurzivno računanje ovakve STFT. Potrebno je pokazati i za koje vrijednosti koraka l ima smisla računati STFT na ovaj način, to jest, kolika je maksimalna vrijednost koraka za koju postoji ušteda u numeričkoj kompleksnosti korišćenjem rekurzivnog pristupa za računanje STFT, u odnosu na njeno računanje primjenom FFT algoritama.

Izraz (2), u slučaju jediničnog pravougaonog prozora $w(m)$ možemo napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} STFT(n,k) = &\sum_{m=-N/2-l}^{N/2-l-1} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} + \\ &+ \sum_{m=N/2-l}^{N/2-1} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} - \\ &- \sum_{m=-N/2-l}^{-N/2} x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \end{aligned}$$

Uvođenjem smjene: $m_1 = m+l$ u prvoj sumi, smjene $m_1 = m - N/2 + l$ u drugoj sumi i smjene $m_1 = m + N/2 + l$ u trećoj dobija se:

$$\begin{aligned} STFT(n,k) = &\sum_{m_1=-N/2}^{N/2-1} x(n-l+m_1)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1-l)} + \\ &+ \sum_{m_1=0}^{l-1} x(n+m_1-l+N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1+N/2-l)} - \\ &- \sum_{m_1=0}^{l-1} x(n+m_1-l-N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m_1-N/2-l)} \end{aligned}$$

gdje prva suma predstavlja STFT računatu u trenutku $n-l$, pomnožena sa članom $e^{j2\pi lk/N}$, što nakon sređivanja dovodi do formule:

$$\begin{aligned} STFT(n,k) = &\, e^{j2\pi lk/N}\Big\{ STFT(n-l,k) + \\ &+ (-1)^k e^{-j2\pi k/N} \Big[\sum_{m=0}^{l-1} x(n+m-l+N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} - \\ &- \sum_{m=0}^{l-1} x(n+m-l-N/2)e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{7}$$

Izraz (7) pokazuje da je STFT u trenutku n moguće računati pomoću STFT računate u trenutku $n-l$ i dodatnih $2l$ odbiraka signala $x(n)$. Može se uočiti da se za $l=1$ formula (7) svodi na formulu (6).

3. ANALIZA BROJA RAČUNSKIH OPERACIJA

Napravimo analizu numeričke kompleksnosti izraza (3). Označimo sa T_N broj operacija za N odbiraka signala (odnosno prozora). Pretpostavimo da je $N = 2^m$, gdje je m pozitivan cio broj. Ilustracije radi, pretpostavićemo da se diskretna Fourier-ova transformacija, za posmatrani trenutak n računa primjenom brzog algoritma "Decimation in frequency" čiji je princip opisan u uvodu, koji za posmatrano N koje je stepen dvojke radi jako brzo. U jednom stepenu FFT-a imamo N sabiranja. Množenje signala sa jediničnim pravougaonim prozorom može se zanimariti u analizi broja operacija. Takođe, množenja sa članovima 1 i -1 takođe možemo zanemariti u našoj analizi. Zato ćemo smatrati da je tokom date iteracije (za dati trenutak n) potrebno uraditi $N/2-1$ množenja. Pošto se DFT sa N članova razbija na dva DFT-a sa $N/2$ članova, ukupan broj operacija u jednoj iteraciji biće jednak:

$$T_N = 2T_{N/2} + N + N/2 - 1 \tag{8}$$

Rješavanje dobijenog rekurzivnog problema dovodi nas do sljedećeg broja računskih operacija potrebnih za računanje STFT u jednom trenutku n, pomoću DFT primjenom brzih algoritama:

$$T_N = N(\frac{3}{2}\log_2 N - 1) + 1 \tag{9}$$

Sada je potrebno naći numeričku kompleksnost predložene rekurzivne formule (7). Može se uočiti da je u jednoj iteraciji postoji $N \cdot l$ operacija za jednu sumu od l članova, isto toliko operacija za drugu sumu od l članova, kao i N množenja eksponencijalnog člana $e^{j2\pi lk/N}$ sa STFT računatom u trenutku $n-l$. Dodatno, neopodno je odraditi $2N$ sabiranja (odnosno oduzimanja) samih suma. Dakle, ukupan broj operacija potreban za računanje izraza (7) za posmatrani trenutak n iznosi:

$$T_N = (2l + 3)N \tag{10}$$

Sada nađimo vrijednost koraka l za koju će postojati ušteda u broju operacija dat izrazom (10) za računanje izraza (7) u odnosu na broj operacija dat izrazom (9). Dobija se da ušteda u broju operacija predloženim metodom postoji ukoliko korak u vremenu l zadovoljava sljedeći uslov:

$$l < \frac{3}{4}\log_2 N - 2 \tag{11}$$

Za različite vrijednosti širine prozora N u tabeli 1. date su maksimalne vrijednosti koraka l za koje postoji ušteda u broju operacija.

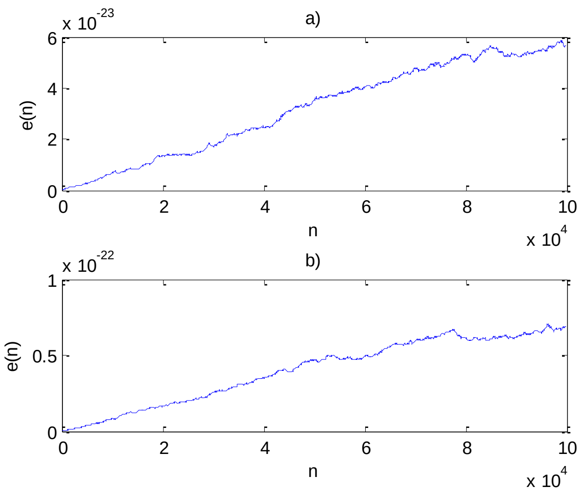
U tabeli 2. predstavljena je procentualna ušteda u broju računskih operacija primjenom uvedene formule, za širinu prozora $N = 1024$ odbirka. Uočavamo da za veće vrijednosti koraka l ušteda u broju operacija postaje sve manja, zato što sume od l članova u formuli (7) postaju sve veće, to jest, neophodno je izvršavati sve više sabiranja u svakoj iteraciji.

N	l_{max}
128	3
256	4
512	4
1024	5

Tabela 1. Maksimalne vrijednosti koraka l za koje postoji ušteda u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u zavisnosti od dužine prozora u STFT.

N=1024	
l	dobitak
1	64.29%
2	50%
3	35.71%
4	21.43%
5	7.14%

Tabela 2. Procentualni dobitak u broju operacija primjenom predloženog rekurzivnog metoda u odnosu na broj operacija direktnom primjenom FFT-a za računanje STFT



Slika 1. Numerička greška koja nastaje pri računanju STFT po predloženom rekurzivnom postupku. Posmatrani signal je: a) bijeli Gauss-ov šum, b) sinusoidalno frekvencijski modulisan signal kome je dodat šum analiziran pod a).

4. ANALIZA GREŠKE USLJED REKURZIJE

Numerički eksperimenti pokazali su da greška koja se akumulira zbog rekurzivne prirode formule (7) ima jako male vrijednosti i linearno raste sa brojem iteracija, što znači da i u slučaju signala jako velike dužine postoji opravdanost za korišćenje predloženog rekurzivnog metoda. Ovo će biti ilustrovano sa nekoliko primjera.

Posmatraćemo signal $s(n)$ koji predstavlja kompleksni bijeli Gausov šum od 100000 odbiraka, pri čemu su varijanse realnog i kompleksnog dijela jednake jedinici. Realni i imaginarni dio ovog šuma su statistički nezavisne veličine. Uzeto je da je prozor širine $N = 128$ odbiraka, a korak $l = 3$. Greška se računa kao srednja vrijednost kvadrata modula razlike između $STFT(n,k)$ računate po formuli (3) i $STFT_{rek}(n,k)$ računate po formuli (7), odnosno:

$$e(n) = E[|STFT(n,k) - STFT_{rek}(n,k)|^2] \qquad (12)$$

Na slici 1. pod a) prikazana je greška iz opisanog eksperimenta.

Na slici 1. pod b) prikazana je greška $e(n)$ za signal $x(n) = s(n) + \exp(5000 j \sin(2\pi n / 20000))$, pri čemu je $s(n)$ kompleksni šum istih karakteristika kao u prethodnom eksperimentu. U oba slučaja uočava se linearni karakter rasta greške, dok je njena maksimalna vrijednost reda 10^{-23}.

5. ZAKLJUČAK

U radu je predstavljena rekurzivna formula koja omogućava brzo računanje STFT sa fiksnim korakom između trenutaka u kojima se proračun vrši. U literaturi je poznata formula koja omogućava rekurzivno računanje za svaki uzastopni trenutak *n* odnosno za *l* = 1. Predloženi rekurzivni metod se za vrijednost koraka 1 svodi na ovu formulu. Cilj uvođenja ovakvog postupka je smanjenje broja operacija neophodnog za numeričke proračune STFT što je krucijalno u real-time aplikacijama. Računanje STFT sa korakom pomjeranja prozora u vremenu koji je veći od 1 je pristup koji se često koristi u praksi.

U radu je pokazano za koje vrijednosti koraka *l* postoji ušteda u broju operacija u zavisnosti od dužine funkcije prozora. Takođe je pokazano kolika je procentualna ušteda za prozor dužine 1024 odbirka primjenom predloženog metoda, u odnosu na klasično računanje STFT primjenom FFT algoritama. U radu su predstavljeni i numerički rezultati analize greške koja nastaje usljed rekurzivne prirode postupka, i pokazano je da se ova greška karakteriše linearnim rastom, i da čak i u slučaju signala velike dužine zadržava zanemarljivo male vrijednosti.

LITERATURA

[1] L. Cohen: “Time-Frequency distributions - a review” *Proc. IEEE*, vol 77, no.7, July 1989, pp. 941-981

[2] Lj. Stanković: “An analysis of some time-frequency and time-scale distributions” *Annales des Telecommunications,* no.9/10, Sept./Oct. 1994, pp. 519-538-

[3] Lj. Stanković: *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, 1990.

[4] A.Papoulis: *Signal analysis* McGraw Hill, New York, 1977.

[5] B.P. Lathi: Signal Processing and Linear Systems, *Berkeley Cambridge Press,* Carmichael, CA, 1998. pp. 617-662.

[6] B.P. Lathi: “Modern Digital and Analog Communication Systems”, *Oxford University Press,* Oxford 1998. pp. 71-101

[7] L.Cohen: “Distributions concentrated along the instantaneous frequency”, SPIE, vol.1348, *Advanced Signal Proc., Algorithms, Architectures and Implementation,* 1992, pp. 402-412.

[8] F. Hlawatsch and G.F. Boudreaux-Bartels: “Linear and quadratic time-frequency signal representations” *IEEE Signal processing Magazine,* April 1992, pp. 21-67.

[9] LJ. Stanković, “A method for time-frequency signal analysis,” *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol-42, No.1, Jan.1994.pp.225-229.

[10] S. Stanković, LJ. Stanković, “An architecture for the realization of a system for time-frequency signal analysis,” *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Part II, No.7, July 1997, pp.600-604.