

# REKONSTRUKCIJA ODBIRAKA SIGNALA KORIŠĆENJEM SPARSE SIGNAL ANALIZE SIGNAL RECONSTRUCTION BASED ON THE SPARSE SIGNAL ANALYSIS

Miloš Daković, Stefan Vujović, Ljubiša Stanković, *Elektrotehnički fakultet*

**Sadržaj:** U radu je analiziran uticaj oštećenih odbiraka signala, na sparse domen istog. Takođe je prikazana mogućnost rekonstrukcije oštećenih odbiraka signala koji imaju sparse prezentaciju u nekom od transformacionih domena. Rekonstrukcija je vršena algoritmom koji se zasniva na metodi najbržeg spustanja, pri čemu je su poznate pozicije oštećenih odbiraka.

**Abstract:** This paper demonstrates influence of damaged signal samples to sparse domain of the same signal. Also, it demonstrates the possibility of reconstruction of damaged signal's samples, when signal has sparse presentation in one of transformation domains. Reconstruction was performed by algorithm which uses method of gradient descent when we know position of damaged samples.

## 1. UVOD

*Sparse signal processing* je danas aktuelna tema u oblasti digitalne obrade signala. Prve radove na temu *sparse signal processing*-a dali su Donoho i Johnstone, davne 1990. god. [1,2].

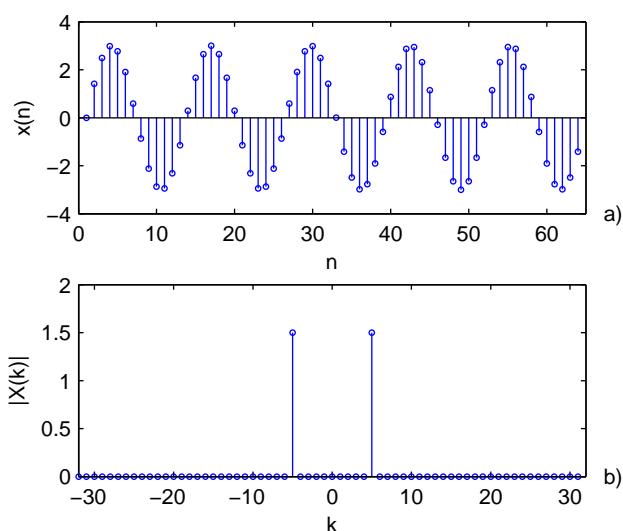
Za diskretni signal  $x(n)$ , sačinjen od  $N$  odbiraka, kažemo da je  $K$ -sparse u domenu  $T$ , ako je u tom domenu sačinjen od  $K$  nenultih elemenata, pri čemu je  $K \ll N$ . Operator  $T$  vrši transformaciju iz jednog domena (*dense*) u drugi, transformacioni domen (*sparse*)

$$X(k) = T[x(n)]. \quad (1)$$

Drugim riječima, za signal kažemo da je *sparse* u nekom domenu, ako je u tom domenu predstavljen sa mnogo manjim brojem nenultih koeficijenata nego što je bio slučaj sa originalnim domenom (vremenski domen za audio ili prostorni domen za video signale).

Jedan od izazova u obradi *sparse* signala predstavlja pronalaženje domena u kojem je dati signal *sparse* ili približno *sparse*. Kada kažemo približno *sparse*, podrazumijevamo da se odbirci signala u transformacionom domenu mogu podijeliti u dvije grupe u skladu sa njihovim amplitudama. Prva grupa predstavlja odbirke od interesa sa amplitudama većim od 0, dok odbirci iz druge grupe uzimaju male vrijednosti koje u analizi možemo zanemariti. Sa tim u vezi, razvijene su metode kojima možemo utvrditi da li je analizirani signal *sparse* u posmatranom domenu  $T$ . Jednostavnim ispitivanjem amplituda  $X(k)$ , možemo zaključiti da li se radi o *sparse* prezentaciji signala. Ukoliko je broj nenultih koeficijenata znatno manji od ukupnog broja koeficijenata, možemo zaključiti da se radi o *sparse* prezentaciji signala. Povratak iz *sparse* domena u izvorni (*dense*) domen se može izvršiti korišćenjem inverznog operatora:

$$x(n) = T^{-1}[X(k)]. \quad (2)$$



Slika 1. Sinusoida: a) Vremenski domen - veliki broj koeficijenata; b) DFT domen - *sparse* domen

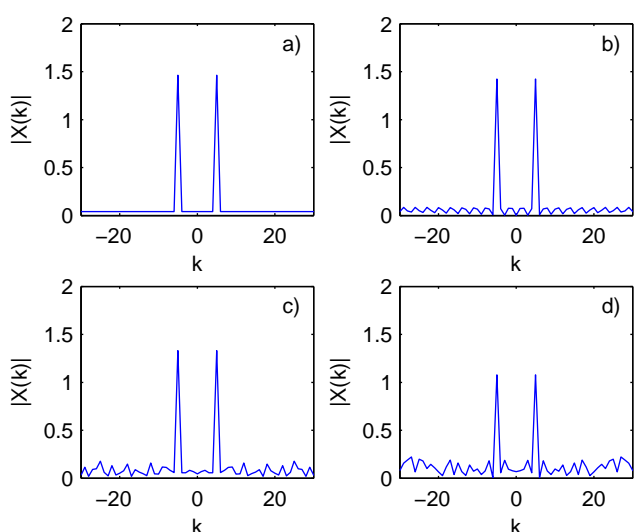
## 2. UTICAJ OŠTEĆENIH ODBIRAKA NA SPARSE DOMEN

U oblasti digitalne obrade signala čest je slučaj da su pojedini odbirci signala oštećeni ili da nedostaju. Do oštećenja odbiraka signala može doći, između ostalog, zbog šuma, greške u mjerenju ili nekog trećeg razloga. Takođe, može se desiti da vrijednosti amplituda nekih odbiraka kojima znamo pozicije nijesu dostupne iz nekog razloga (npr. greška instrumenta koji detektuje signal, oštećenje memorije u kojoj je signal skladišten...). Situacija u kojoj imamo oštećene i/ili nedostajuće odbirke predstavlja problem u oblasti digitalne obrade signala, jer se dalja analiza i obrada vrši sa pogrešnim ili nepotpunim informacijama.

U ovom dijelu rada ispitaćemo uticaj oštećenih i nedostajućih odbiraka signala na *sparse* (transformacioni) domen. U daljem radu pod pojmom oštećeni ćemo podrazumijevati i nedostajuće odbirke. Radi jednostavnosti, a ne gubeći opštost, posmatrajmo sinusoidalni signal, pri čemu

operator  $T$  predstavlja diskretnu Furijeovu transformaciju ( $DFT$ ).

Na slici 1 je prikazan signal u vremenskom i transformacionom domenu. U vremenskom domenu signal je sačinjen od velikog broja nenultih odbiraka, dok je taj isti signal u  $DFT$  domenu izrazito *sparse* signal, sačinjen od svega dva (zbog negativnih frekvencija) nenulta koeficijenta. Posmatrajmo šta se dešava kada signalu koji je *sparse* u  $DFT$  domenu, oštetimo jedan, dva, sedam i na kraju 15 odbiraka u vremenskom domenu. Rezultati su prikazani na slici 2. Već nakon jednog oštećenog odbirka u  $DFT$  domenu nema nultih članova. Kako broj oštećenih odbiraka raste, sve je veća vrijednost koju uzimaju  $DFT$  koeficijenti, koji su za slučaj sinusoide (bez oštećenja) imali vrijednost nula. Ovaj porast vrijednosti koeficijenata možemo uočiti na slici 2. Tu činjenicu ćemo iskoristiti u rekonstrukciji oštećenih odbiraka.



Slika 2. Spektar sinusoide sa oštećenim odbircima u vremenskom domenu: a) 1 oštećeni odbirak; b) 2 oštećena odbirka; c) 7 oštećenih odbiraka; d) 15 oštećenih odbiraka

### 3. METOD REKONSTRUKCIJE

Ispitujući promjene u *sparse* domenu signala, nastale kao posledica oštećenja pojedinih odbiraka u izvornom (*dense*) domenu, došli smo do zaključka da se rekonstrukcija signala kojem znamo pozicije oštećenih odbiraka, može vršiti analizirajući *sparse* domen. Rekonstrukciju ćemo vršiti tako što iz skupa svih mogućih vrijednosti amplitude oštećenog odbirka izaberemo onu za koju će signal u transformacionom domenu biti "najviše" *sparse*, odnosno imati najbolju koncentraciju. Uvedimo mjeru koncentracije korišćenu u [8],

$$\mu[x] = \frac{1}{N} \left( \sum_n |T[x(n)]|^{1/p} \right)^p, \quad (3)$$

pri čemu je  $p < 2$ . Napomenimo da za  $p = 1$  navedena mjera predstavlja  $l_1$  normu, i jednaka je sumi apsolutnih vrijednosti koeficijenata signala u *sparse* domenu. Član  $1/N$  predstavlja skaliranje mjere, pri čemu je  $N$  broj odbiraka signala.

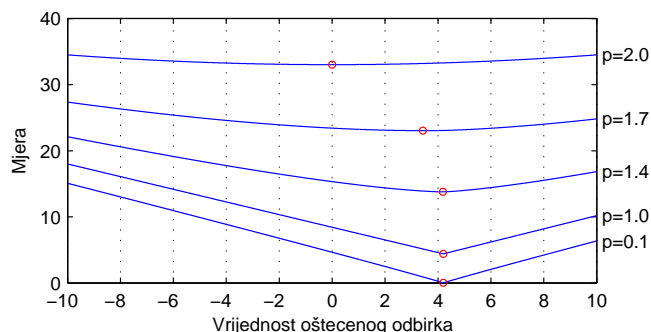
Ispitajmo ponašanje usvojene mjere za slučaj jednog oštećenog odbirka signala koji se sastoji od tri sinusoidalne komponente različitih amplituda i frekvencija:

$$x(n) = 2.5 \sin(2\pi f_1 n \Delta t) + 1.5 \cos(2\pi f_2 n \Delta t) + 0.4 \sin(2\pi f_3 n \Delta t), \quad (4)$$

pri čemu je  $f_1 = 7$ ,  $f_2 = 24$  i  $f_3 = 45$ ,  $\Delta t = 1/N$ . Broj odbiraka signala je  $N = 256$ . Ispitali smo vrijednost mjere za slučaj varijacije vrijednosti amplitude oštećenog odbirka u opsegu  $[-10, 10]$  sa korakom 0.01. Tačna vrijednost oštećenog odbirka je 4.2008, a odbirak se nalazi na poziciji  $n = 83$ . Kao što se vidi na slici 3, za vrijednost parametra  $p = 1$ ,  $p = 0.1$  i  $p = 1.4$  mjera je imala najmanju vrijednost u slučaju kada je oštećeni odbirak uzeo vrijednost 4.20. Minimum mjere je na slici označen kružicom. Obzirom na usvojeni stepen tačnosti, ta vrijednost je najbliža tačnoj vrijednosti.

Korišćenja mjera za  $p = 2$  predstavlja  $l_2$  normu. U tom slučaju se minimum mjere dobija kada je vrijednost rekonstruisanog odbirka jednaka 0. To se objašnjava činjenicom da  $l_2$  norma predstavlja energiju signala. Kao što znamo energija signala je manja što je vrijednost odbirka bliža 0.

U nastavku rada korišćena je mjera sa  $p = 1$ .



Slika 3. Ponašanje mjere za pretpostavljene vrijednosti odbirka, u slučaju jednog oštećenog odbirka, za različite vrijednosti parametra  $p$ .

### 4. ALGORITAM REKONSTRUKCIJE METODOM NAJBRŽEG SPUŠTANJA

U ovom dijelu rada ćemo objasniti algoritam koji ima za cilj da rekonstruiše nedostajuće odbirke signala. Pretpostavićemo da imamo više oštećenih odbiraka čije pozicije znamo, kao i da je poznat domen u kojem je dati signal *sparse*.

Posmatrajmo signal definisan sa (4). Ovaj signal ima *sparse* prezentaciju u  $DFT$  domenu ( $T \rightarrow DFT$ ). Formirajmo sada signal  $y^{(0)}(n)$  koji na mjestima oštećenih odbiraka ima vrijednost 0, a na ostalim mjestima je jednak originalnom signalu (4). Pretpostavimo da je odbirak u

trenutku  $n_i$  oštećen,  $x(n_i) \neq y^{(0)}(n_i)$ . Dalje, sprovođićemo analizu oštećenih odbiraka signala  $y^{(k)}(n)$ , gdje  $k$  predstavlja broj iteracije. Za svaki oštećeni odbirak, u iteraciji  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), formiramo dva signala:

$$y_1^{(k)}(n) = \begin{cases} y^{(k)}(n) + \Delta & \text{za } n = n_i \\ y^{(k)}(n) & \text{za } n \neq n_i \end{cases}, \quad (5)$$

$$y_2^{(k)}(n) = \begin{cases} y^{(k)}(n) - \Delta & \text{za } n = n_i \\ y^{(k)}(n) & \text{za } n \neq n_i \end{cases}, \quad (6)$$

gdje je  $\Delta$  konstanta kojom želimo ispitati da li oštećeni odbirak signala  $y^{(k)}(n)$  na poziciji  $n_i$  treba povećati ili smanjiti. Zatim procijenimo izvod mjere za poziciju  $n_i$  po formuli:

$$g = \frac{\mu[y_1^{(k)}] - \mu[y_2^{(k)}]}{2\Delta}, \quad (7)$$

pri čemu je mjera  $\mu$  definisana sa (3), za vrijednost  $p = 1$ . Izvod mjere nam govori koliko je odbirak na poziciji  $n_i$  oštećen. Što je vrijednost tog odbirka više oštećena to je vrijednost izvoda u toj tački veća.

Identična procedura se sprovodi za svaki oštećeni odbirak. Na taj način formiramo vektor  $G$  dužine  $N$  (gradijent). Na mjestima oštećenih odbiraka ovaj vektor ima vrijednost izračunatu po formuli (7), dok na ostalima mjestima vrijednost postavimo na 0.

Imjući u vidu oblik krive sa slike 3, za slučaj kada je  $p = 1$ , zaključujemo da promjenu vrijednosti odbiraka treba vršiti u smjeru suprotnom od smjera izvoda izračunatog sa (7). Stoga se korekcija vrijednosti oštećenih odbiraka vrši formulom:

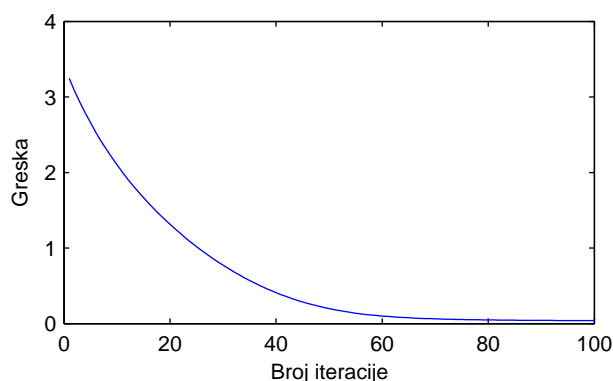
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \alpha * G, \quad (8)$$

pri čemu je  $\alpha$  konstanta od koje zavise performanse algoritma (brzina konvergencije i greška). Ponavljajući ovaj postupak iterativno ( $k = 1, 2, \dots$ ) oštećeni odbirci će konvergirati ka tačnim vrijednostima. Ponašanje srednje kvadratne greške rekonstruisanog signala prikazano je na slici 4. Promjenama konstanti  $\alpha$  i  $\Delta$ , kao što je već rečeno, možemo uticati na grešku, a samim tim i na performanse samog algoritma.

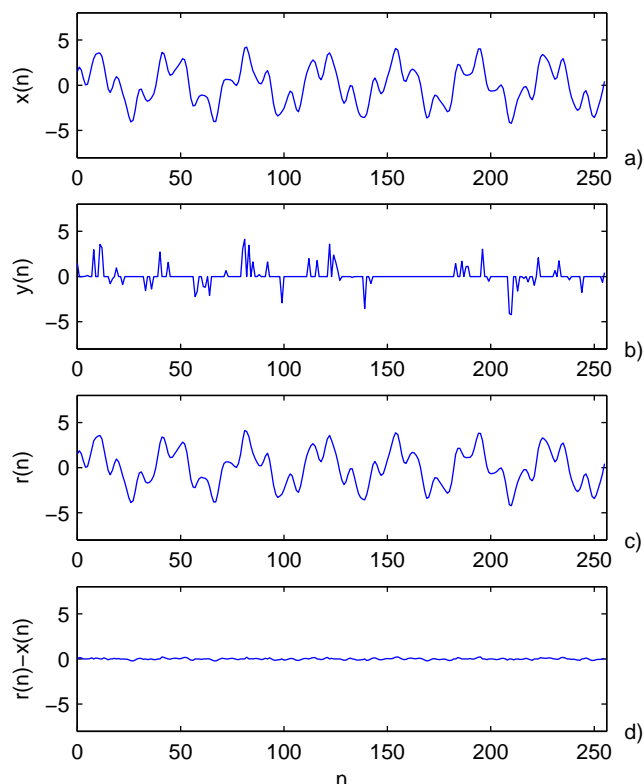
## 5. SIMULACIJE

Na slici 5 je predstavljen rezultat rekonstrukcije signala datog sa (4), pri čemu su pojedini odbirci istog bili oštećeni. Na slici pod a) prikazan je originalni signal. Pod b) se nalazi oštećeni signal, pri čemu su oštećene (nepoznate) vrijednosti postavljene na 0. Oštećeno je 200 odbiraka signala dužine 256. Primjenivši ranije opisani algoritam došli smo do rekonstruisanog signala prikazanog na slici pod c), dok je na

slici pod d) prikazana greška rekonstruisanog signala. Kao što se i vidi sa slike greška je zanemarljivo mala. Prilikom realizacije algoritma, korišćene su vrijednosti konstanti  $\nabla = 2$  i  $\alpha = 3$ .



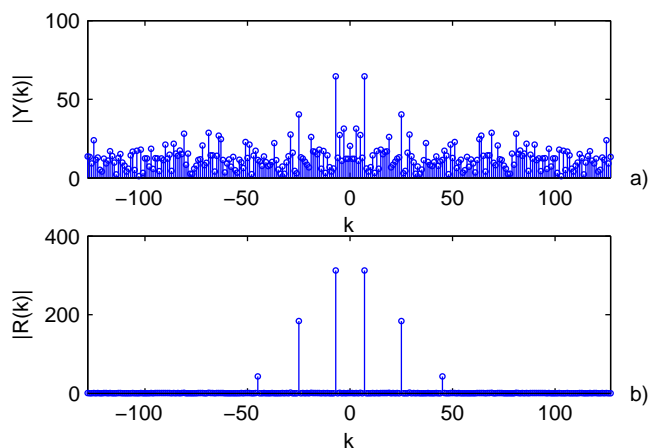
Slika 4. MSE rekonstruisanog signala



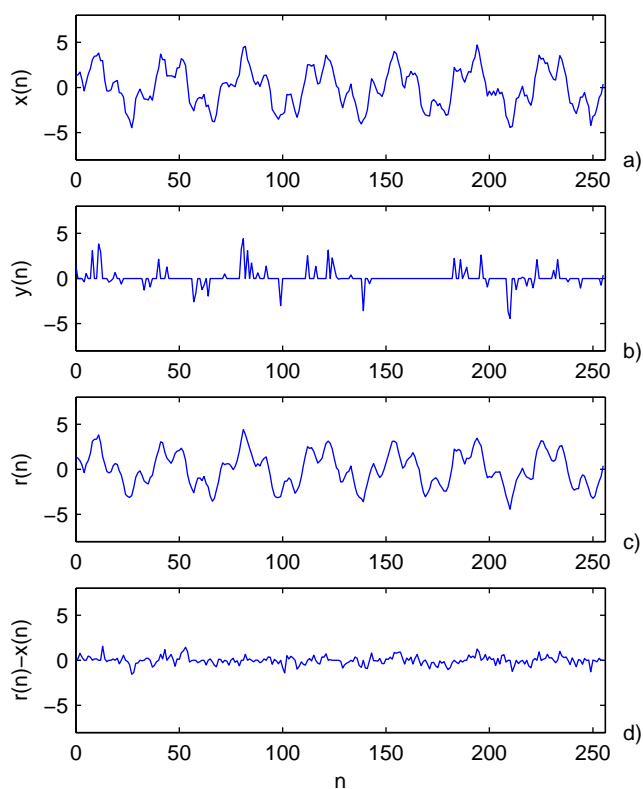
Slika 5. Simulacija rekonstrukcije: a) Originalni signal; b) Oštećeni signal; c) Rekonstruisani signal d) Greška

Na slici 6 su prikazani *sparse* domeni (DFT) signala prije i poslije primjene algoritma rekonstrukcije. Kao što se vidi na slici pod a), za slučaj oštećenog signala se ne mogu jasno uočiti svi koeficijenti koji pripadaju originalnom signalu. Nakon rekonstrukcije, kao što se vidi na slici pod b), *sparse* koeficijenti se lako uočavaju.

Performanse algoritma su testirane i u uslovima bijelog šuma, pri čemu je SNR=15dB. Rezultati su prikazani na slici 7. Možemo primijetiti da je rekonstrukcija uspješno izvršena i u ovom slučaju. Greška rekonstrukcije je očekivano veća nego u slučaju bez šuma.



Slika 6. *Sparse* domeni: a) Oštećeni signal; b) Rekonstruisani signal



Slika 7. Simulacija rekonstrukcije u prisustvu šuma (SNR=15dB): a) Originalni signal; b) Oštećeni signal; c) Rekonstruisani signal d) Greška

## 6. ZAKLJUČAK

U radu smo analizirali uticaj oštećenih odbiraka na *sparse* domen signala. Pokazano je da se mjere koncentracije mogu koristiti pri rekonstrukcije oštećenih odbiraka signala.

Predstavljen je iterativni algoritam, zasnovan na metodu najbržeg spuštanja, koji vrši rekonstrukciju oštećenih odbiraka, pod uslovom da znamo domen u kojem je dati signal *sparse*, kao i pozicije oštećenih odbiraka. Performanse algoritma ispitane su na primjeru signala kod kojeg je približno 80% odbiraka bilo oštećeno.

Kao jedan od narednih koraka u unapređenju pomenutog algoritma, moglo bi se ispitati ponašanje algoritma (brzina konvergencije i greška) za različite vrijednosti parametara  $\alpha$  i  $\Delta$ , koje su u ovom radu određene empirijski. Korišćenje neke druge mjere koncentracije signala u *sparse* domenu bi takođe u nekim slučajevima moglo dovesti do boljih rezultata.

## LITERATURA

- [1] D. Donoho, "Denoising by soft thresholding", IEEE Trans, on Inform. Theory, vol. 41, pp. 613-627, Maj 1995.
- [2] D. Donoho i J. Johnstone, "Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage", Biometrika, vol. 81, pp. 425-455, Septembar 1994.
- [3] Z. Uskoković, Lj. Stanković, I. Đurović, *Matlab for Windows*, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, 1998.
- [4] Lj. Stanković, M. Daković, T. Thayaparan, *Time-Frequency Signal Analysis with Applications*, Artech House, 2013
- [5] Lj. Stanković, *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, Beograd 1990.
- [6] S. Stanković, I. Orović, E. Sejdić: *Multimedia Signals and Systems*, Springer, 2012.
- [7] M. F. Duarte, *Compressive Sensing for Signal Ensembles*, unpublished thesis (Phd), Rice university, Houston Texas, Jul 2009.
- [8] Lj. Stanković, "A measure of some time-frequency distributions concentration", Signal Processing, vol. 81, pp. 621-631, 2001